onde (vedi § 5) le z_i e $z_h^{(t)}$ che compariscono in $F, F_1 \ldots F_g$ resulteranno entro S_n eguali alle corrispondenti $u_i, u_h^{(t)}$. Ma se

$$z_h^{(t)} - u_h^{(t)} = \frac{\partial (z_t - u_t)}{\partial x_h} = 0$$

resulterà

$$z_t - u_t = \text{cost.}$$

lungo tutte le parallele all'asse x_h e siccome queste incontrano il contorno S_{n-1}, ove $z_t = u_t$, così dovremo avere in tutti i punti entro S_n, $z_t = u_t$, il che dimostra il teorema.

Matematica. — *Sulla definizione dell'area d'una superficie.* Nota di G. Peano, presentata dal Socio Casorati.

« Scopo della presente Nota è l'esame delle varie definizioni date dell'area di una porzione qualunque di superficie (non piana), e di alcune questioni relative.

« I geometri greci, ragionando sulla lunghezza di linee e sull'area di superficie (sfera, cilindro, ecc.), partivano da *postulati* invece che da *definizioni*. Però la differenza è solo formale. I postulati enunciati da Archimede (¹) valgono esattamente le seguenti definizioni:

1) *Lunghezza d'un arco curvilineo piano convesso è il valore comune del limite superiore delle lunghezze delle linee poligonali inscritte, e del limite inferiore delle circoscritte.*

2) *Area d'una superficie convessa è il valore comune del limite superiore delle aree delle superficie poliedriche convesse inscritte, e del limite inferiore delle circoscritte.*

« Egli dimostra per le curve e superficie studiate la coincidenza dei due limiti, la quale si potrebbe anche dimostrare in generale.

« Ora la prima definizione non vale per le linee non piane. Essa si può rendere applicabile in ogni caso omettendo le linee circoscritte, così:

3) *Lunghezza d'un arco curvilineo è il limite superiore delle lunghezze delle linee poligonali inscritte in esso* (²).

« Ma la seconda definizione, per le aree, non è applicabile alle superficie concavo-convesse, e pare difficile il renderla applicabile in ogni caso.

« I procedimenti, per determinare la lunghezza d'un arco e l'area d'una superficie, seguiti dai varî matematici fino al principio del corrente secolo,

(¹) Della sfera e del cilindro, libro I, *λαμβανόμενα*.

(²) Questa definizione è più semplice della comune, essendo più semplice il concetto di *limite superiore d'un sistema di quantità*, che quello di *limite verso cui tende una quantità variabile*. Da essa si deduce, senz'altro, che ogni arco ha una lunghezza finita o infinita. Già usai tale definizione nelle mie *Applicazioni geometriche del calcolo differenziale*, pag. 161. Il sig. Jordan nel suo *Cours d'Analyse*, t. III, pag. 594, dimostrò la coincidenza delle due definizioni nei casi più comuni.

erano poco esatti (¹). Solo nei trattati di calcolo relativamente recenti si suol definire la lunghezza d'un arco e l'area d'una superficie. Ora, se la prima definizione non presenta difficoltà, la seconda lasciò sempre a desiderare. La definizione data da Serret e riportata da tanti autori, nella quale si considera il limite verso cui tende una superficie poliedrica inscritta, non vale; poichè una tale superficie poliedrica può tendere, dipendentemente dal modo di variare delle sue faccie, verso ogni limite maggiore di quella quantità che da tutti si chiama area della superficie (²).

« Il compianto Harnack, nella versione del trattato del Serret (³), aggiunge la condizione che le faccie della superficie poliedrica siano triangoli i cui angoli non si avvicinino indefinitamente a 0. Ma nemmeno con questa condizione la definizione risulta soddisfacente, potendosi ancora fare la medesima obbiezione.

« Il sig. Hermite (⁴) dice: *Nous abandonnerons donc la surface polyédrale, qui est l'analogue du polygone inscrit dans un arc de courbe ...*, e definisce l'area come il limite d'un sistema di poligoni non contigui, tangenti alla superficie. Questa definizione, del tutto rigorosa, lascia a desiderare in quanto che in essa entrano esplicitamente gli assi di riferimento.

« Si può ottenere ad un tempo il rigore e l'analogia fra le definizioni relative all'arco e all'area, ove si faccia uso, oltrechè del concetto di retta limitata considerata in grandezza e direzione (*segmento*, *vettore*), anche del concetto dualitico di area piana considerata in grandezza e giacitura. Questi enti furono introdotti in geometria specialmente per opera di Chelini, Möbius, Bellavitis, Grassmann e Hamilton. Un'area piana così considerata, o meglio la linea suo contorno, si può chiamare *bivettore*, essendo essa il prodotto, secondo Grassmann, di due vettori (⁵).

(¹) Così in Lagrange, *Theorie des fonctions analytiques*, Paris 1813, pag. 300, il risultato è ottenuto per mezzo d'una asserzione non esatta.

(²) Questa osservazione trovasi pubblicata per la prima volta nelle lezioni da me date all'Università di Torino nell'anno 1881-82 e litografate dagli allievi, a pag. 143, lezione del 22 maggio 1882. La stessa osservazione fu pure fatta dal sig. Schwarz, e da questi comunicata al sig. Hermite, il quale la pubblicò nel suo *Cours professé à la faculté des sciences, pendant le second sem. 1882, second tirage*, pag. 35, qualche tempo dopo la mia pubblicazione. L'errore principale commesso da Serret sta nel ritenere che il piano passante per tre punti d'una superficie abbia per limite il piano tangente alla medesima, proposizione questa evidentemente falsa.

(³) *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung*, vol. II, 1885 pag. 295. Dalla condizione imposta dall'Harnack risulta effettivamente che i piani delle faccie tendono verso i piani tangenti. Il difetto sta in ciò che se $z = f(x, y)$ è l'equazione d'una superficie, e $f(x, y)$ è univoca, non ne risulta come conseguenza che ogni superficie poliedrica inscritta non possa essere incontrata da una parallela all'asse delle z in più di un punto.

(⁴) Ib. Troisième édition (1887) pag. 36.

(⁵) Usai il nome di *bivettore*, corrispondente a quello di *vettore* introdotto da Hamilton, nel mio *Calcolo geometrico, secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann* (1888).

« Si ha la proposizione:

4) *Data una linea chiusa (non piana)* l, *si può sempre determinare una linea piana chiusa o bivettore* l′, *in guisa che, proiettando le due linee* l *e* l′ *su d'un piano arbitrario, con raggi paralleli di direzione arbitraria, le aree limitate dalle loro proiezioni risultino sempre eguali.*

« Questa proposizione è conseguenza immediata della somma, o composizione, dei bivettori, quando la linea *l* è poligonale. Il solito passaggio al limite permette di dimostrarla quando la *l* è una linea curva, descritta da un punto avente sempre derivata finita, ed anche in altri casi. Le aree si debbono considerare tenendo il debito conto dei segni.

« In virtù della proposizione 4), potremo chiamare bivettore ogni linea chiusa, piana o no; due bivettori *l* ed *l′* che soddisfino alle condizioni della proposizione 4) si dicono *eguali*, o *equipollenti*. Per *grandezza* e *giacitura* d'un bivettore non piano *l*, si intende la grandezza e la giacitura del bivettore piano equipollente *l′* (1).

« È chiaro che:

5) *Se si proietta ortogonalmente la linea chiusa (non piana)* l *su d'un piano variabile, il massimo dell'area limitata dalla proiezione di* l *vale la grandezza del bivettore* l; *e questo massimo avviene quando il piano su cui si proietta ha la giacitura di* l.

« Se ora si intende per *vettore d'un arco di curva* il vettore limitat dagli estremi dell'arco, cioè la sua corda considerata come vettore, la definizione 3) si può pure enunciare:

6) *Lunghezza d'un arco di curva è il limite superiore della somma delle grandezze dei vettori delle sue parti.*

« Analogamente se si intende per *bivettore d'una porzione di superficie* il bivettore formato dal contorno di essa, si può assumere per definizione:

7) *Area d'una porzione di superficie è il limite superiore della somma delle grandezze dei bivettori delle sue parti* (2).

« Fra il vettore d'un arco di curva, e il bivettore d'una porzione di superficie passa una analogia completa. Così alla proposizione che, sotto certe condizioni,

8) *La direzione del vettore d'un arco infinitesimo di curva è quella della tangente; e il rapporto fra la sua grandezza e la lunghezza dell'arco è l'unità,*

(1) La proposizione 4) è di utilità in molte questioni di geometria. Si consideri p. e. una spira d'un'elica, i raggi che vanno ai suoi estremi, e la porzione compresa di asse; si ha così una linea chiusa, e si riconosce facilmente che essa è equipollente alla circonferenza base del cilindro su cui sta l'elica: quindi proiettando su piani con raggi paralleli le due linee, si deducono le aree di varie curve piane.

(2) Questa definizione, qualora si sostituisca al posto di grandezza d'un bivettore il suo significato, si trasforma in quella da me data nelle *Applicazioni geometriche*, pag 164.

corrisponde la proposizione che, sotto condizioni analoghe,

9) *La giacitura del bivettore d'una porzione infinitesima di superficie è quella del piano tangente; e il rapporto fra la sua grandezza e l'area di quella porzione è l'unità.*

« La proposizione:

10) *Il primo termine nello sviluppo della differenza fra un arco* s *e la sua corda, secondo le potenze ascendenti di* s, *è*

$$\frac{s^3}{24R^2},$$

ove R *è il raggio di curvatura,*
ha per analoga:

11) *Il primo termine nello sviluppo secondo le potenze di* ϱ, *della differenza fra l'area d'un cerchio geodetico tracciato sulla superficie, di raggio* ϱ, *e la grandezza del suo bivettore, è*

$$\frac{\pi\varrho^4}{8}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right)=\frac{\pi\varrho^4}{4}C,$$

ove R_1 *e* R_2 *sono i raggi di curvatura principali, e* C *è la curvatura della superficie secondo la definizione del prof. Casorati* » (1).

Matematica. — *Sui gruppi completi di tre trasformazioni lineari involutorie negli spazî ad n dimensioni.* Nota del dott. A. Del Re, presentata dal Socio Cremona.

« 1. Nello spazio lineare ad n dimensioni S_n si hanno $\frac{n}{2}$ o $\frac{n+1}{2}$ (secondochè n è pari o dispari) omografie involutorie, non degenerate, di specie diverse (2), ciascuna dotata di due spazî correlativi fondamentali di punti ed S_{n-1} uniti, cioè un S_h ed un S_{n-h-1} $\left(h=0,1,\ldots,\frac{n-2}{2}\text{ per } n \text{ pari, ed } h=0,1,\ldots,\frac{n-1}{2}\text{ per } n\text{ dispari}\right)$ non aventi alcun punto di comune. In S_n si hanno inoltre le corrispondenze polari rispetto a varietà quadratiche ad $n-1$ dimensioni, e, nel solo caso di n dispari, anche i sistemi nulli, cioè le corrispondenze polari in cui ogni punto stà sull'S_{n-1} corrispondente (3).

(1) *Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune*, Acta Mathematica, tomo XIV, Stockholm.

(2) Veronese, *Sur l'intérpretration géométrique de la théorie* ecc. Ann. di Matem. vol. XI; e Bertini, *Le omogr. involutorie* ecc. R. Ist. Lomb. 1886.

(3) La prima idea dei sistemi nulli negli spazî superiori si incontra nel n. 91 (§ VII) della Memoria del Jordan: *Essai sur la géométrie à n dimensions* (Bulletin de la Soc. Math., An. 1875), in cui l'autore, considerando il moto di un sistema rigido in uno spazio ad n dimensioni, dimostra che, per n dispari, se l'S_{n-1} normale alla direzione dello sposta-